Glava 1

UVOD

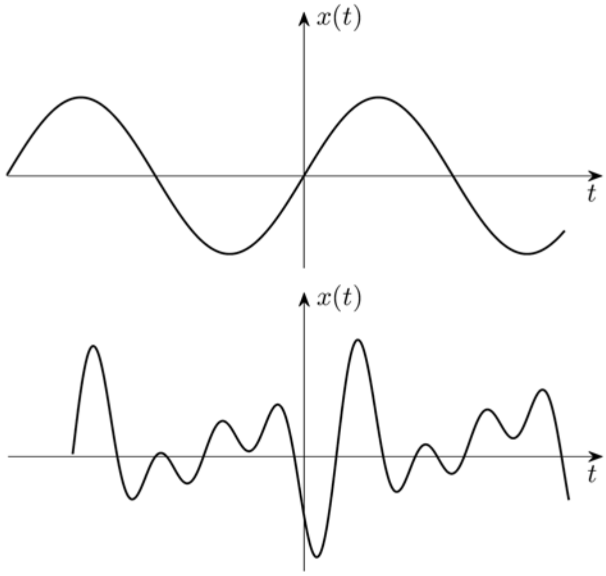
Kada analiziramo prirodne ili vještački izazvane fizičke pojave, nastojimo ih matematički opisati i u tu svrhu koristimo matematičke funkcije. Na primjer, zvuk koji nastaje usljed varijacija akustičkog pritiska opisujemo matematičkom funkcijom koja izražava zavisnost akustičkog pritiska ili subjektivnog doživljaja glasnoće zvuka u zavisnosti od vremena. Slično je sa ostalim fizičkim pojavama koje mogu da se opišu jednodimenzionalnim funkcijama neke nezavisne varijable, koja ne mora da bude vrijeme. Kao primjere možemo posmatrati promjenu temperature u toku vremena, promjenu napona na vodu u funkciji rastojanja od referentne tačke u prostoru. Radi jednostavnosti ćemo u daljnjem izlaganju smatrati da nezavisna varijabla ima prirodu vremena. Matematičkim funkcijama možemo opisati i fizičke pojave kod kojih postoji više od jedne nezavisne promjenljive. Kao primjere možemo navesti sliku i video, gdje posmatramo prostornu, odnosno prostorno-vremensku raspodjelu svjetline. Matematičke funkcije jedne ili više nezavisnih varijabli koje opisuje prirodnu ili vještački izazvanu fizičku pojavu nazivamo *signalima*. Shodno prethodnom razmatranju, razlikujemo jednodimenzionalne, dvodimenzionalne, trodimenzionalne i u opštem slučaju višedimenzionalne signale. Budući da se sve fizičke pojave odvijaju na jedinstven način, signali moraju da budu jednoznačne funkcije.

Signalima opisujemo fizičke pojave kako bismo ih mogli jednostavnije analizirati i eventualno na njih uticati. *Analizom signala* otkrivamo prirodu fizičkih pojava koje oni opisuju, dok *obradom signala* po nekom pravilu transformišemo pobudni signal u signal odziva. U širem značenju, rezultat obrade signala ne mora biti signal, već može da bude brojčani podatak, zaključak i slično. Zato kažemo da sistemi za obradu signala odgovaraju na jednu ili više pobuda generišući signale ili drugačije oblike odziva. Pravu definiciju pojma *sistem* je veoma teško dati zbog njegove sveobuhvatnosti, ali možemo reći da je sistem objekat čije karakteristike određuju njegovo ponašanje i interakciju sa okolinom. *Analiza sistema* je oblast nauke koja nastoji analitičkim i numeričkim metodama okarakterisati sisteme kako bismo razmjeli njihovo ponašanje, odnosno kako bismo mogli odrediti kako će oni reagovati na različite pobude, dok se s*inteza sistema* bavi izgradnjom sistema sa željenim karakteristikama. *Sistem za obradu signala* je takav sistem koji može da se opiše jednoznačnom relacijom ulaz-izlaz. Sistemi po svojoj prirodi mogu biti veoma raznoliki: biološki, eko-sistem, elektronski, računarski, ekonomski, itd... U gotovo svakom sistemu nailazimo na primjere obrade signala. Iako u fizičkoj prirodi signala i sistema postoje značajne razlike, osnovne teorijske postavke analize signala i sistema su slične u mnogim oblastima.

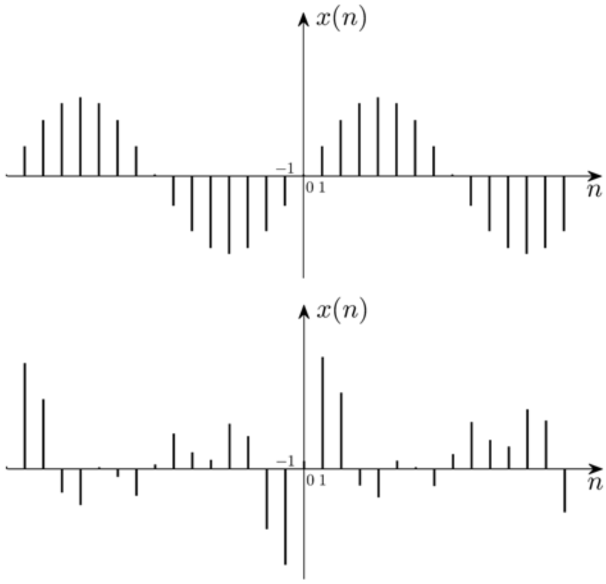
Kada signalima opisujemo fizičke pojave koje su po svojoj prirodi *kontinualne*, tj. poznate i jednoznačno određene za svaku vrijednost nezavisne promjenljive, vrlo često nije neophodno poznavanje vrijednosti signala u svakom vremenskom trenutku, već se dovoljno informacija o tim fizičkim pojavama može dobiti na osnovu poznavanja vrijednosti signala u pojedinim vremenskim trenucima. Posmatrajmo, na primjer, dnevno mjerenje vodostaja rijeke ili mjerenje temperature nekog hemijskog procesa koje se obavlja svakih nekoliko mikrosekundi. Kao rezultat ovih mjerenja nastaju signali čije vrijednosti poznajemo samo u pojedinim vremenskim trenucima. Signale koji imaju poznate i jednoznačno definisane vrijednosti za svaku vrijednost nezavisne promjenljive, osim u konačnom broju tačaka, nazivamo *kontinualni signali*. Za signale koji su definisani samo za specifične vrijednosti nezavisne varijable kažemo da su *diskretni*. Te vrijednosti nezavisne varijable ne moraju da budu ekvidistantne, ali se u praktičnim primjenama zbog jednostavnosti uobičajeno bira podjednaka udaljenost između susjednih vrijednosti nezavisne varijable u kojima su vrijednosti signala definisane. U daljnjem izlaganju ćemo smatrati da je diskretni signal definisan za ekvidistantne vrijednosti nezavisne varijable.

Budući da su njihove vrijednosti poznate samo u diskretnim vremenskim trenucima, diskretne signale možemo zapisati kao sekvencu brojeva. Umjesto oznake nezavisne varijable, jednostavnije je koristiti indeks n. Na taj način diskretni signal postaje funkcija cjelobrojne varijable n i može se označiti sa $x(n)$. Ako se posebno ne naglasi, podrazumijeva se da je signal definisan za svako $n \in \mathbb{Z}$.

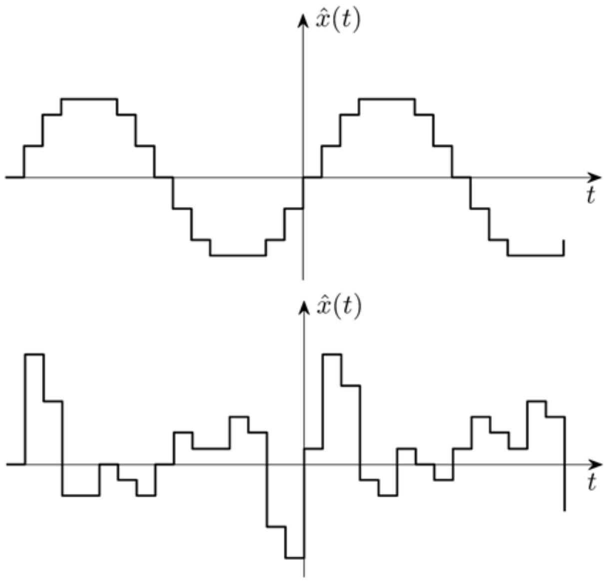
Osim podjele signala na osnovu kontinualne ili diskretne prirode nezavisne varijable, potrebno je razmotriti i podjelu koja je posljedica kontinualne ili diskretne prirode same fizičke pojave, odnosno signala koji tu pojavu opisuje. Prvu grupu čine signali kontinualni po amplitudi koji opisuju kontinualne fizičke pojave i čija amplituda može da poprimi proizvoljnu vrijednost iz nekog opsega brojeva. Za signale iz druge grupe, kod kojih amplituda poprima vrijednosti iz konačnog skupa brojeva, kažemo da su *kvantovani*. Ako je signal kontinualan i ako njegova amplituda nije kvantovana, kažemo da se radi o *analognom* signalu. Za signal diskretan u vremenu i kvantovane amplitude kažemo da je *digitalan*. U daljnjem izlaganju ćemo razmatrati diskretne signale, neovisno od toga da li su im amplitude kvantovane ili ne. Tamo gdje to bude neophodno, biće naglašeno da se radi o digitalnim signalima.



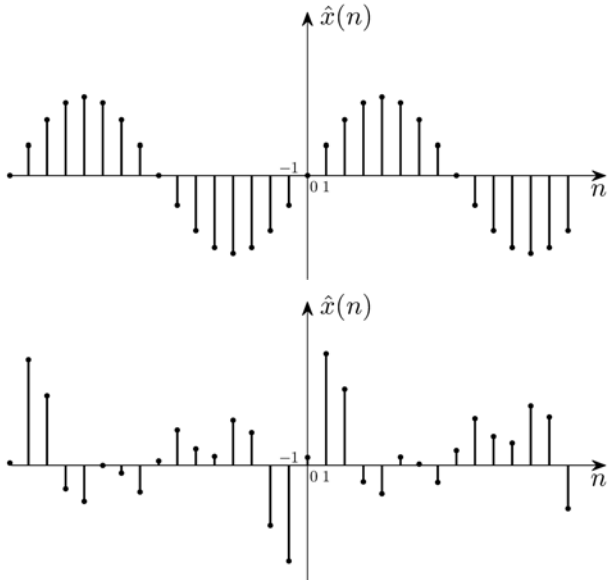
Slika 1.1 Primjeri analognih signala.



Slika 1.2 Primjeri diskretnih signala.



Slika 1.3 Primjeri signala kontinualnih u vremenu sa kvantovanom amplitudom.



Slika 1.4 Primjeri digitalnih signala.

Na Slici 1.1 prikazani su primjeri analognih signala, na Slici 1.2 primjeri diskretnih signala sa kontinualnom amplitudom, na Slici 1.3 primjeri kvantovanih signala i na Slici 1.4 primjeri digitalnih signala. Kako bi se naglasila činjenica da se vrijednosti digitalnih signala neophodno zaokružuju na najbližu vrijednost iz raspoloživog skupa brojeva i napravila razlika u odnosu na diskretne signale, u grafičkom prikazu digitalnih signala mogu se dodati tačake ili kružići na krajevima linija, kao na Slici 1.4.

Diskretni signali mogu opisivati diskretne fizičke pojave, kao na primjer broj automobila koji kroz ulicu prođu u toku svakog sata, ali mogu nastati i tako što se u diskretnim tačkama vremena odaberu vrijednosti signala koji je po svojoj prirodi kontinualan. Takav je slučaj kod signala koji su nastali mjerenjima, na primjer mjerenjem temperature u poznatim trenucima vremena. Postupak pridruživanja brojčanih vrijednosti kontinualnim fizičkim veličinama u diskretnim vremenskim trenucima nazivamo *analogno/digitalna konverzija*, ili kratko *digitalizacija*. Analogno/digitalna konverzija se sastoji od dva koraka. Prvo se vrši *odmjeravanje* signala tako što se uzimaju uzorci signala u odabranim vremenskim trenucima. Tako nastaju diskretni signali. Zatim im se dodjeljuje brojčana vrijednost iz konačnog skupa brojeva.

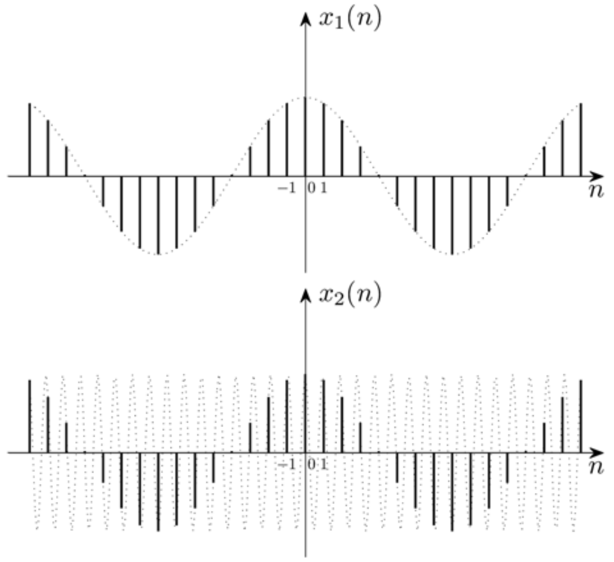
Posmatrajmo vrijednosti kontinualnog signala $x(t)$ u diskretnim trenucima vremena $n\Delta t,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots$, gdje je Δt *korak odmjeravanja*, odnosno udaljenost između susjednih trenutaka vremena u kojima posmatramo vrijednosti kontinualnog signala. Birajući vrijednosti kontinualnog signala u diskretnim vremenskim trenucima dobijamo sekvencu brojeva $x(n\Delta t),\ n=0,\pm1,\pm2,\dots$, a nakon zamjene diskretnih vrijednosti nezavisne varijable $n\Delta t$ indeksom n, diskretni signal zapisujemo sa $x(n)$.

Intuitivno je jasno da odmjerke signala treba češće uzimati ako se signal brzo mijenja, kako bismo imali dovoljno informacijama o fizičkoj pojavi koju signal opisuje i kako bismo osigurali da neka brza promjena ne prođe neopaženo. Osnovni cilj prilikom odmjeravanja signala je da se sačuva što više informacija sadržanih u signalu, kako bi se na osnovu odmjeraka mogao što tačno, ili sa što manjom greškom, rekonstruisati originalni kontinualni signal. Međutim, ako se odmjeravanje signala ne radi sa dovoljno velikom *frekvencijom odmjeravanja*, koja je recipročna koraku odmjeravanja, nije moguća rekonstrukcija originalnog kontinualnog signala. Tada se dešava da se odmjeravanjem različitih kontinualnih signala dobijaju iste vrijednosti diskretnih signala. Kao primjer posmatrajmo odmjeravanje dva kontinualna prostoperiodična signala sa korakom odmjeravanja Δt, kao na Slici 1.5. Neka su učestanosti kontinualnih signala Ω_0 i $\Omega_0+\dfrac{2\pi}{\Delta t}$. Odmjeravanjem ova dva kontinualna signala različitih učestanosti nastaju identični diskretni signali:

$$\cos(\Omega_0 t)\big|_{t=n\Delta t}=\cos(\Omega_0 n\Delta t), \tag{1.1}$$

$$\cos\left[\left(\Omega_0+\frac{2\pi}{\Delta t}\right)t\right]\Bigg|_{t=n\Delta t}=\cos\left[\left(\Omega_0+\frac{2\pi}{\Delta t}\right)n\Delta t\right]=\cos(\Omega_0 n\Delta t), \tag{1.2}$$

te iz ovih diskretnih signala, koji predstavljaju odmjerke kontinualnih signala, nije moguće zaključiti o kom kontinualnom signalu se radi. Odmjeravanju signala ćemo posvetiti posebnu pažnju u kasnije, kada ćemo pokazati da frekvencija odmjeravanja signala mora biti bar dva puta veća od gornje granične frekvencije sadržane u signalu, kako bi bila moguća idealna rekonstrukcija kontinualnog signala iz njegovih odmjeraka.



Slika 1.4 Primjer odmjeravanja različitih kontinualnih signala koje rezultuje istim diskretnim signalima. Kontinualni signali su prikazani tačkastim linijama.

Prilikom obrade signala digitalnim hardverom ili softverski, brojčane vrijednosti se zapisuju sa konačnom dužinom riječi. Stoga nije moguće raditi sa kontinualnim vrijednostima amplitude, već se amplitudama signala moraju pridružiti vrijednosti iz konačnog skupa brojeva. Taj proces nazivamo *kvantizacija signala*. Dakle, kvantizacija je proces kojim se ulazni signal kontinualne amplitude preslikava u izlazni signal čija amplituda može da poprimi samo konačno mnogo različitih nivoa.

Pretpostavimo da je dinamički opseg analognog signala $D=[x_{\min}, x_{\max})$, tj. da je amplituda signala $x(t)$ kontinualna i da može da poprimi bilo koju vrijednost iz dinamičkog opsega, $x_{\min} \le x(t) < x_{\max}$. Želimo da signal $x(t)$ kvantujemo sa L različitih nivoa kojima su pridružene vrijednosti $\hat{x}_k$, $k=0,1,\dots,L-1$, takve da je $\hat{x}_0 \langle \hat{x}_1 \langle \hat{x}_2 \dots \langle \hat{x}_{L-2} \langle \hat{x}_{L-1}$. Pridruživanje brojčanih vrijednosti kvantizacionim nivoima naziva se *kodovanje signala*. Dakle, kvantizaciju posmatramo kao proces koji preslikava ulazni signal $x(t)$

kontinualan po amplitudi u signal $\hat{x}(t)$ čije vrijednosti amplituda pripadaju skupu brojeva $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, ..., \hat{x}_{L-1}\}$. Podijelimo dinamički opseg signala $x(t)$ na nepreklapajuće segmente $[x_k, x_{k+1})$, $k = 0,1,\ldots,L-1$, pri čemu je $x_0 = x_{\min}$, $x_L = x_{\max}$ i $x_k < x_{k+1}$. Ako su ti segmeni jednakih veličina govorimo o *linearnoj kvantizaciji*, a ako nisu o *nelinearnoj kvantizaciji*.

Preslikavanje ulaznog signala $x(t)$ u izlazni signal $\hat{x}(t)$ se vrši na osnovu *kvantizacione funkcije* na sljedeći način:

$$x(t) \in [x_k, x_{k+1}) \Rightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}_k,\ k = 0,1,\ldots L-1. \tag{1.3}$$

Zbog toga što amplituda kvantovanog signala poprima konačan broj različitih nivoa, vrijednosti signala se koduju sa konačnim brojem bita B i uobičajeno je $L = 2^B$. Očigledno je da tokom procesa kvantizacije dolazi do promjena signala. *Greška kvantizacije*, koja je jednaka razlici originalnog signala i kvantovanog signala

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \tag{1.4}$$

zavisi od dinamičkog opsega signala i broja nivoa kvantizacije, kao i od izbora kvantizacione funkcije i kvantizacionih nivoa. Greška kvantizacije se često posmatra kao poseban signal i zbog svoje stohastičke prirode naziva se šum kvantizacije. Broj bita kojim se koduje kvantovani signal je veoma važan. Pri memorisanju, procesiranju i prenosu signala poželjno je baratati sa što manjim brojem bita. Međutim, kvantovanjem signala sa malim brojem kvantizacionih nivoa gubimo dio informacija koje nosi originalni signal. Stoga je neophodno naći kompromis između ova dva oprečna zahtijeva, tako da se odabere najmanji mogući broj bita za zapis amplitude, a da se pri tome sačuvaju neophodne informacije sadržane u signalu. U praksi se koristi veći broj kvantizacionih nivoa, vrlo rijetko manji od $2^8 = 256$.

Kvantizacijom diskretnog signala, a zatim kodovanjem kvantovanih nivoa dobijamo digitalni signal $\hat{x}(n)$. Ovako dobijen digitalni signal je niz brojeva koji predstavljaju kvantovane vrijednosti amplituda diskretnog signala. Radi jednostavnije notacije, u daljnjem izlaganju ćemo koristiti istu oznaku $x(n)$ za sve diskretne signale, jednako kao i isti stil grafičkog prikazivanja bez dodatnih tačkica ili kružića na krajevima linija, kao na Slici 1.2, neovisno o tome da li su njihove amplitude kvantovane ili ne.